Prueba N 2

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:

Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Pregunta 4	Pregunta 5	Total	Nota

__Instrucciones__:
- **NO HAY CONSULTAS**. Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y **celulares**.
- La prueba dura 100 minutos.

---

1) **[12 ptos.]** Al expresar el área de cierta región D se obtuvo la siguiente integral:

$$\int_0^1 \int_y^1 dxdy + \int_1^2 \int_0^{2-y} dxdy$$

a) **[5 ptos.]** Dibuje la región D.

b) **[7 ptos.]** Exprese el área de la región en coordenadas polares.

2) **[10 ptos.]** Calcule la siguiente integral:

$$\int_0^1 \int_x^1 \frac{\sin(y)}{y} dydx$$

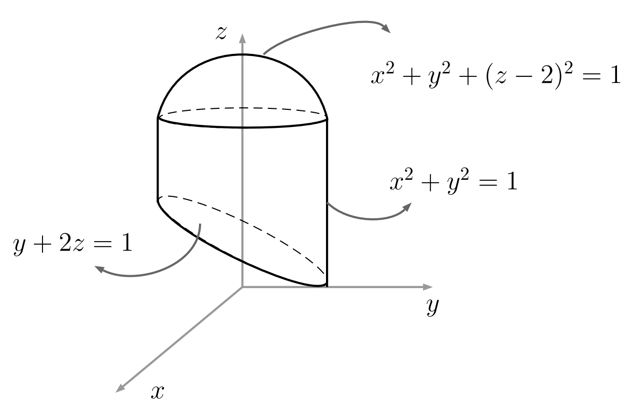
3) **[8 ptos.]** Sea R la región en el plano $\mathbb{R}^2$ limitada por las curvas

$$y = 2x + 3, \quad y = 2x + 1, \quad y = 5 - x, \quad y = 2 - x$$

Mediante un ***cambio de variables apropiado*** calcule la siguiente integral:

$$\int\int_R (\sqrt{y - 2x} + \sqrt{y + x}) dA$$

4) **[15 ptos.]** Considere el sólido que está al interior del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, acotado superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 1$ e inferiormente por el plano $y + 2z = 1$, como se muestra en la figura:



Exprese el volumen del sólido en los ordenes:

a) **[7 ptos.]** $dzdxdy$

b) **[8 ptos.]** $dxdzdy$

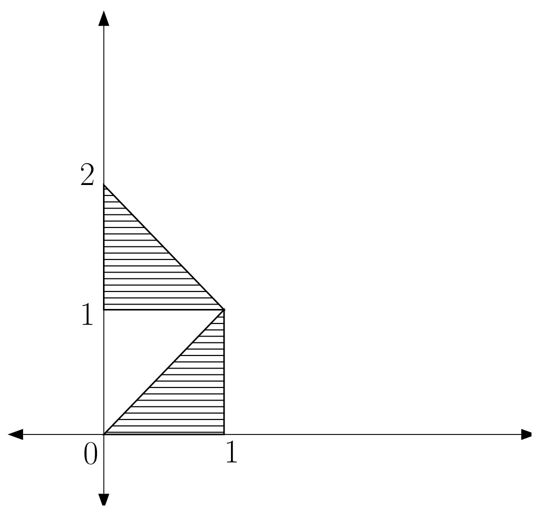
5) **[15 ptos.]** Considere el sólido que se encuentra al interior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, bajo el plano $z = 2$ y sobre el plano $z = -1$.

a) **[8 ptos.]** Exprese el volumen en coordenadas cilíndricas.

b) **[7 ptos.]** Exprese el volumen en coordenadas esféricas.

PAUTA

1) a) La región D es:

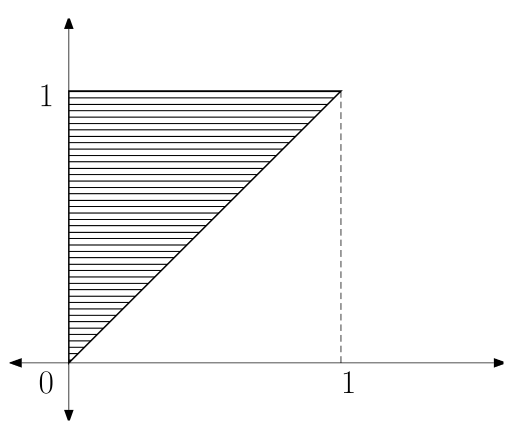


b) La integral en coordenadas polares nos queda:

$$\int_0^{\pi/4}\int_0^{1/\cos(\theta)} r dr d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_{1/\sin(\theta)}^{2/(\sin(\theta)+\cos(\theta))} r dr d\theta$$

(1 pto. de descuento por cada extremo malo de la integral o por jacobiano)

2) La región involucrada es



(2 pts.)

Por lo que podemos cambiar el orden de la integral, en dónde nos queda:

$$\int_0^1\int_0^y \frac{\sin(y)}{y} dx dy = \int_0^1 \sin(y) dy = 1-\cos(1)$$

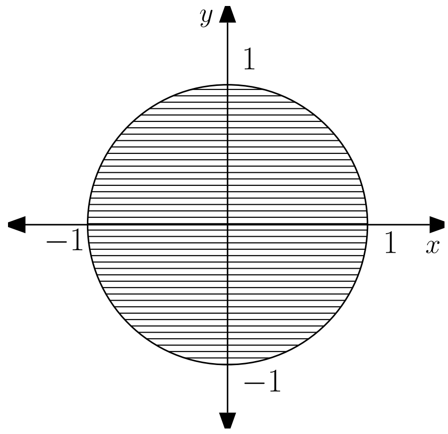
(5 pts. por dar vuelta la integral + 3 pts. por calcular)

3) Realizando el cambio $u = y-2x$ y $v = y+x$ transformamos la región R en el rectángulo con vértices $(1,2),(1,5),(3,2)$ y $(3,5)$ en el plano uv. (2 pts.)
El Jacobiano de la transformación nos da $J^{-1} = -3$. Finalmente podemos escribir la integral y nos queda:

$$\int_1^3\int_2^5 (\sqrt{u}+\sqrt{v})\frac{1}{3} dv du = 2\sqrt{3} - \frac{8}{9}\sqrt{2} + \frac{20}{9}\sqrt{5} - \frac{2}{3}$$

(4 pts. por expresar + 2 pts. por calcular)

4) a) La proyección en el plano xy nos queda:



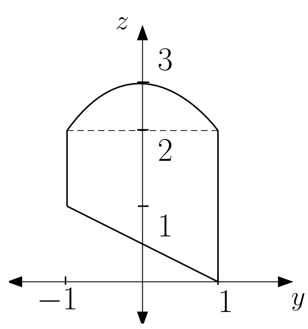
(2 pts.)

Luego la integral nos queda

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{\frac{1-y}{2}}^{2+\sqrt{1-x^2-y^2}} dzdxdy$$

(-1 pto. por cada extremo malo)

b) La proyección en el plano yz nos queda:



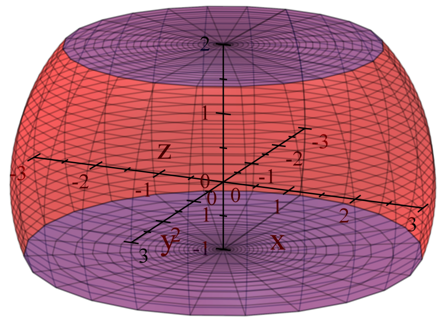
(2 pto.)

Observar que x se comporta cambia según que parte de la región tomamos, por lo que la integral nos quedaría:

$$\int_{-1}^{1}\int_{\frac{1-y}{2}}^{2}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dxdzdy + \int_{-1}^{1}\int_{2}^{2+\sqrt{1-y^2}}\int_{-\sqrt{1-y^2-(z-2)^2}}^{\sqrt{1-y^2-(z-2)^2}} dxdzdy$$

(3 ptos. cada sumando)

5) La figura es:



a) Observar que en coordenadas cilíndricas hay que separar en 3 integrales distintas, con lo cual nos queda:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{5}}\int_{-1}^{2} rdzdrd\theta + \int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}}\int_{-1}^{\sqrt{9-r^2}} rdzdrd\theta + \int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{8}}^{3}\int_{-\sqrt{9-r^2}}^{\sqrt{9-r^2}} rdzdrd\theta$$

(2 puntos el primer sumando + 3 puntos los otros 2)

b) Para coordenadas esféricas también es necesario separar en tres integrales, con lo cual nos queda:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\arctan(\sqrt{5}/2)}\int_0^{2/\cos(\phi)}\rho^2\sin(\phi)d\rho d\phi d\theta+\int_0^{2\pi}\int_{\arctan(\sqrt{5}/2)}^{\pi-\arctan\sqrt{8}}\int_0^{3}\rho^2\sin(\phi)d\rho d\phi d\theta$$

$$+\int_0^{2\pi}\int_{\pi-\arctan(\sqrt{8})}^{\pi}\int_0^{-1/\cos(\phi)}\rho^2\sin(\phi)d\rho d\phi d\theta$$

(2 ptos. cada sumanod + 1 pto. a criterio)